

論理的な思考を養う指導についての研究

—生徒の演繹的活動と帰納的支援について—

明治大学附属中野中・高校

菅 達徳

要 約

知識基盤社会を生きる子どもたちに必要なもののひとつとして、高等学校数学科の目標から考えられる通り、演繹的な面と帰納的な面の両面から論理的な思考を形成する姿勢を養うことが必要である。本研究では生徒が推論したことについて自ら身体を動かして確かめながら数理を探究し、それを教師がコンピューターを用いて、生徒の演繹的活動を援助し帰納的に演示していくことで、論理的な思考を養えることを求めたものである。具体的には、生徒が理解しづらいと思われる2次関数のグラフや定義域の移動にともなう最大値・最小値の変化をとらえさせる内容に対して、生徒が実際に手を動かす活動をおこない、コンピューターを利用して生徒の活動を支援しながら、論理的な思考を養うことを目指した指導実践研究である。

キーワード：身体的な活動、教師の支援、2次関数の定義域・グラフの移動

1. はじめに

中学校学習指導要領で示している数学的活動の内容のうち、「数学的な表現を用いて根拠を明らかにして筋道立てて説明し伝え合う活動」は、数学を学ぶことを通して「論理的に考える力」を養う活動ととらえることができる。「論理的に考える力」について平成18年に国立教育政策研究所では「特定の課題に関する調査」として、「論理的に考える力」を含めて「数学的に考える力」について実施した。この調査では「数学的に考える力」を「算数的活動や数学的活動を支え、遂行するための必要な資質や能力などの総称」と位置づけ問題を作成した。永田によれば調査観点の「論理的に考えること」を調べる問題内容は「筋道を立てて説明するために適切に表現したり、論理的に考えたりすることとして、演繹的に考える問題や反例をあげて否定する問題、帰納的に考える問題、証明を構成する問題」(永田 2013) だったと述べている。本研究ではこれを参考にし、論理的な思考を養う指導について、演繹面と帰納面の両面を基底にして指導法を求めていったものである。

高等学校の授業で、演繹的な面と帰納的な面の両者の内容を合わせもつ授業はどのようなものが考えられるだろうか。先行研究を分析すると、相馬は「活用」と「習得」という言

葉を用いて、『活用させながら習得させる授業』は『考えさせながら教える授業』といってもよい。授業のはじめに与えられた問題を自分で、そしてみんなで考えていく中で、生徒たちが新たな知識・技能や見方や考え方に気づいたり、教師が教えていく授業である。」(相馬 2008)と述べている。また、大橋は実験等を取り入れた数学の学習について「数学の楽しさは、自分の体を動かし、自分の頭を働かせることで初めて感得されるものではないだろうか。そうした意味で、授業の中に実験・試行改良・思考・発見などの生徒自身による数学的活動を取り入れ、その充実を図ることが重要である。また、数学の活動過程におけるコミュニケーション能力の育成にも光を当て、単に問題が解ければよいという考えから脱却し、多様な考えを交換できるような課題の提示のもとに、発表・議論を通して数学的表現を用いたコミュニケーション能力の向上を目指したい。」(大橋 2005)と述べている。

これらから考察できるように、生徒みずからが推論し、それを確かめるのに自分の身体を動かす活動は、演繹的な面と帰納的な面の両者を合わせもち、高等学校数学科での論理的な思考を養う目的につながると考えられる。

本研究では、この視点に立ち演繹的な活動として生徒が推論し、帰納的な活動として身体を動かして確かめながら数理を探究する活動をおこない、それを教師がコンピューターで補完することを通じ、論理的な思考を養う指導を目的として着手したものである。

2. コンピューターを用いる指導について

まず、本研究で用いたソフトについて述べ、現職数学教師のコンピューターを用いることへの指導観ならびに意義、筆者がいままでに実践した指導実践例について述べていく。

(1) GRAPES について

本研究で用いたコンピューターソフトは、「GRAPES」である。「GRAPES」では陽関数、陰関数ともに簡単に操作や表示することができる。そのため、教師が黒板にグラフを図示する一般的な指導とは異なり、このソフトを用いると、関数のグラフを連続的に動かす指導を行える。その効果は多くの実践報告に示されている通りである。観察や実験が数学の学習に大切であると実感させることができるソフトであると考えられる。

(2) コンピューターを用いた指導観について

コンピューターを用いた現職数学教師の指導観について、永田らは千葉県内の公立中学校正規数学教師(679人対象, 347人回収)対象にアンケート調査を実施した。「コンピューターを利用して授業をおこなうか」という問いに対して、「大変有効」「ある程度有効」が276名(79.5%)。「コンピューターを用いた授業を実施しているか」には「多く実施」「ある程度実施」が59名(17.0%)。「あまり実施していない」「全く実施していない」が287名(82.7%)だった。この結果から、教師たちはコンピューターの必要性は感じるものの、なかなか指導実践に生かされてない現状が明らかになっている。現在は手軽になったとはいえ、いまだ普通教室でのパソコンやプロジェクターなどの器材準備や、授業で用いる手軽なソフトが少ないことが原因の一つになっていると考えられる。

このような現状のなか、コンピューターを用いることに注目した指導について先行研究

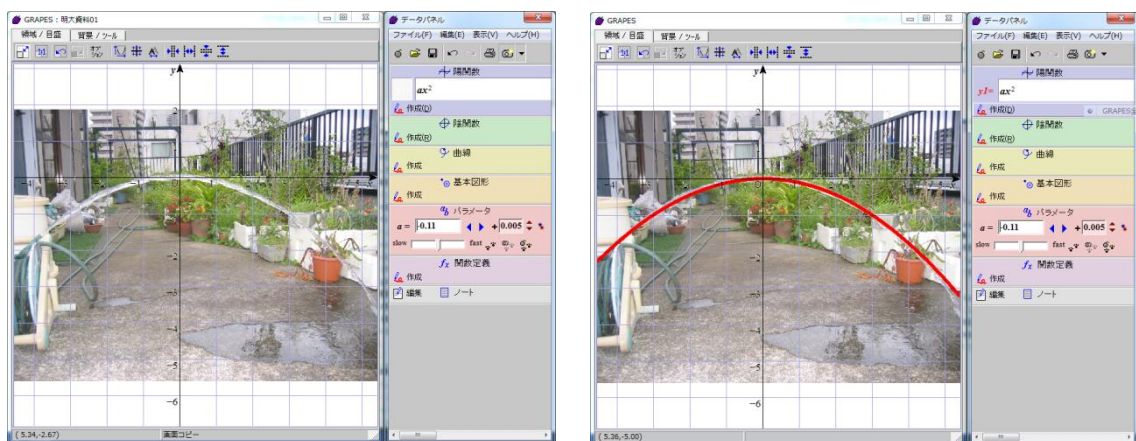
を概観する。松ヶ野は認知的アプローチから、「体験的認知のために豊かな感覚刺激を利用できるようにすべきであり、内省のための道具は、アイディアの探求を支援しなくてはならない。これらの認知はそれぞれ全く異なったコンピューターの支援を必要とするのである。」(松ヶ野 2006)と必要性を述べ、アイディアの探求または創造性を培うことに対し、コンピューターの支援の重要性を述べている。

また、半田は生徒が主体的な「数学的考察」を促すことについて、『『コンピューターによるシュミレーション』『帰納的な施行を繰り返すことによる気づき』『実測値データをもとにした分析』を教材のなかに取り込み、これらの中から少なくともひとつを組み入れた教材を用意することが、学習者からの新たな発見を促す。そしてそれを演繹的に説明しようとする態度を育てることや、実測値データを用いた教材はもちろん、シュミレーションを取り入れた教材を効率よく扱うために、コンピューターや電卓などのコンピューターを用いることは欠かせない考える。」(半田 2007)と数学教育にコンピューターを取り入れることの重要性を述べている。

(3) 筆者がおこなった指導実践例

これらの分析や先行研究に対し、筆者がおこなった具体的な指導実践のひとつに、中学3年「関数 $y=ax^2$ 」のグラフ導入の際に黒板で放物線のグラフの形状を紹介し、身近なところで見られる放物線の様子を体感させる実践がある。「放物線」という言葉に対し、どのようなイメージが考えられるか生徒に聞いたところ、スポーツ中継でアナウンサーがボールの飛んでいく様子を伝えていたことを思い出した生徒がいた。それを受けて、筆者は、飛んでいくボールではないが、ホースから放水している様子の写真(デジタルカメラ撮影)を紹介し、それを GRAPES の座標平面の背景に取り込んだ。次にその写真を背景にした座標平面上に、上に凸となる $y=ax^2$ のグラフを重ねて表示し放水の様子が $y=ax^2$ のグラフとして表せるかどうか調べることにした。その結果、定数 a の値を変化させることによって、目指したグラフの曲線に近づけることができた。この指導を通して、コンピューターの利用が、以下の3つの良い影響を生徒に与えたと考えられた。

- ① 座標平面を具体的な写真に変えることが可能なので、実在する身近な具体例を用いることができる。
- ② ①で用いた座標平面上にグラフを重ね合わせることが可能なので、座標平面上に描いていた関数のグラフが身近な存在のものであることを実感させることができる。
- ③ a の値を変化させることが可能なので、 $y=ax^2$ のグラフの変化の様子を動的に探究させることができ、実感させることができる。



3. 指導目的および準備

次に本研究がめざす生徒の身体的活動とICTとの共働の指導実践報告を述べていく。

(1) 目的

以下にあげる内容を目的として、本研究の指導実践をおこなった。

- ① 与えられたテーマに対し、生徒が現在利用可能なツールをどう活用すべきか、アイディアを出そうとする積極性を養う。 <数学に対する興味・関心>
- ② そのツールを用いることによって、主体的に身体的な活動による実験・観察をしながら、数理を知り、その定着を図る。 <実験・観察>
- ③ 生徒の活動を、教師がコンピューターでデモンストレーションするなどの支援をおこない、内容の理解を深める。 <教師の支援>
- ④ 身体的な活動による実験・観察の楽しさを知ることによって、数学の学習でも身体的活動による試行の大切さを感じさせる。 <生徒の主体的活動の促進>

(2) 題材の設定

本研究で用いた指導内容は、2次関数のグラフの応用の部分で、グラフ(軸)または定義域の移動にともなう最大値・最小値の変化をとらえるものである。これは大学入試センター試験などの入試問題に頻出する内容でありながら(資料1参照)、以下の4つの理由から、生徒が内容をイメージしづらく、定着が難しい内容であると考えた。

- ① 具体的な数を係数とする2次関数とは異なり、2次関数の式や定義域にパラメーターが含まれているので考えにくい。
- ② 軸や定義域の移動によって、最大値または最小値をとる x の値が変化する。また、定義域がその値を含むか含まないか判断がしづらい。
- ③ 場合分けをしなければならず、論理的な思考展開をしなければならない。
- ④ 移動するものが定義域と軸のどちらか一方であることがなかなか理解できない。

このような理由から、生徒が主体的に身体的な活動として手を動かし、実験・観察をおこなって、それを教師が支援することで、内容の定着が図れ、論理的な思考を養うことを確認できる題材として適切と考えた。

<資料 1>

センター試験より

a を定数とし、 x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2(a - 1)x + 2a^2 - 8a + 4$$

の $3 \leq x \leq 7$ における M を求めよ。

(3) 事前準備 0

まず、本研究の指導実践に入る前に、資料 2 の例題などを用いて、定義域の右端が移動することで、最大値・最小値をとる x の値が変化がする問題を導入した。

<資料 2>

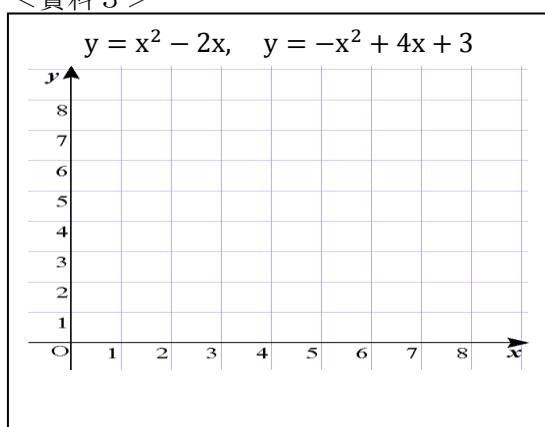
例題

$a > 0$ のとき、2 次関数 $y = x^2 - 4x + 5$

($0 \leq x \leq a$) の最小値を求めよ。

さらに、生徒が活動するためのツールとして、座標平面を書いたプリント 3 枚と、 x 軸の幅を 2 にあわせた「短冊」を各生徒用に用意した（資料 3）。ツールの活用方法を生徒が自ら考えることも、重要な活動であると考え、最初は配布するのみとした。

<資料 3>



4. 指導実践について

(1) 実践内容

① 定義域の移動

本研究の指導実践に入る前の既習事項として、3 (3) で述べたように、定義域の左端を固定し、右端のみが移動するような、定義域の幅を変えることによる最大値・最小値の変化を扱った。そして本時では、グラフと定義域の幅を固定し、定義域が x 軸方向に移動する問題、すなわちグラフの左側から右側に定義域が通過していく問題をまず扱うこととした。この内容にあたって、生徒に配布したツールは短冊と資料 3 の座標平面である。具体的な問題設定は次の通りである。

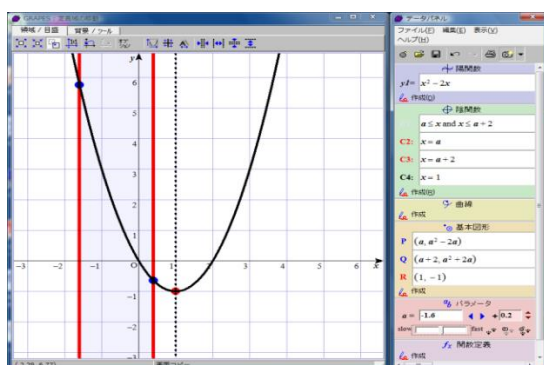
定義域を $a \leq x \leq a+2$ とする次の2次関数について、それぞれの最小値を求めよ．
 $y = x^2 - 2x$ ，
 $y = -x^2 + 4x + 3$

生徒には資料3を印刷して配付した．配付後すぐに生徒はどのような方策を打ち出したらよいのか考え始め、既習事項を思い起こしながらアイデアを探し始める様子が見られた．最初は短冊の利用方法について見当がつかない者が目立っていたが、まず座標平面に設定された問題のグラフを描いてみる生徒が見られ始めた．その後、短冊をどのようにしたらよいか考えた結果、座標平面にあてるなどして実験をおこなった生徒から、短冊の幅が2になっていることに気づいたことが発言され、定義域の移動であるから、短冊を定義域に見立てればよいなどのアイデアが自由に発言された．

生徒から短冊の用い方等のつぶやきが活発化し始めたところで、教師からの支援をおこなった．ここで支援をおこなった理由は、生徒からアイデアが多様に出てきたものの、逆に多様となり過ぎてしまい、「固定されたグラフで定義域の変化にともなう最小値の変化をとらえる」と考えていた指導目標を達成するためには、方向性が発散してしまうと思われるためだった．

具体的な支援内容としてプロジェクターで「GRAPES」を用いてデモンストレーションをおこなった．「GRAPES」では、グラフやグラフの軸、定義域の境界をそれぞれ個別に状況に応じて表示しないし非表示にすることができ、生徒が身体を動かして考えたグラフや定義域の動きと同じ動きを画面上で動的に示すことができる．また教師によって活動中の生徒の活動方針に対して容易に微調整が行え、軌道修正しながら考えるべき内容や目的を確認させることができる．

考えるべき内容や目的が修正および焦点化されてきたところで、再び生徒自身が短冊と各自の描いたグラフを用いて、身体を動かす活動をおこない、解答を見つけていった．そして、再び、教師が「GRAPES」を用いた支援として、生徒の活動をデモンストレーションし、各自が出した解答を検証し、グラフが固定されて定義域が移動する場合の考え方をまとめた．



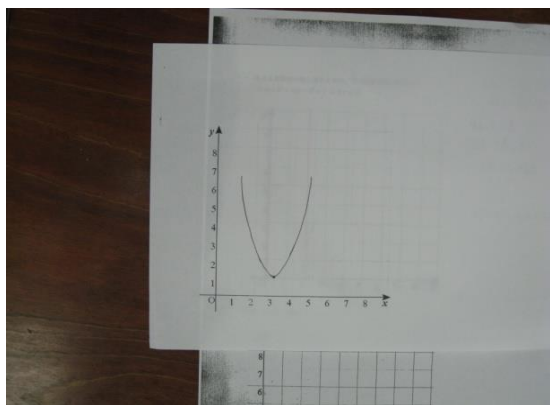
② 軸の移動

次に①と同様に、教師が配布したツールを用いて生徒が身体的な活動をおこなった後、その活動を教師がコンピューターを用いて支援する実践をおこなった。はじめに下記の問題を提示し、座標平面のプリント（資料3）を各2枚ずつ配付した。

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を求めよ。

生徒はすでに定義域を移動させる活動をおこなっているのですぐに手を動かして考えようとした。1枚目のプリントには、2直線 $x=0$ と $x=2$ を赤線などで強調して、定義域をその2直線の間で表現し、もう1枚には k の値を任意にした下に凸な放物線のグラフを書いて、その2枚を重ねあわせていた。そして、重ね合わせた座標平面の一方を動かしながら、最小値の変化を捉えようとしていた。ここで教師は、生徒がグラフを描いたときに、そのグラフはどのような動きをするのか予想させ、その理由を考えさせた。生徒からは「式を変形すると、頂点の座標が $(k, 1)$ であることが求められるので、頂点は $y=1$ 上を動き、軸が $x=k$ の x 軸と平行に移動するグラフとなる」という考えが出された。それを教師が「GRAPES」を用いてプロジェクターで表示し、 k の値を変化させながら、生徒の活動内容を確認した。

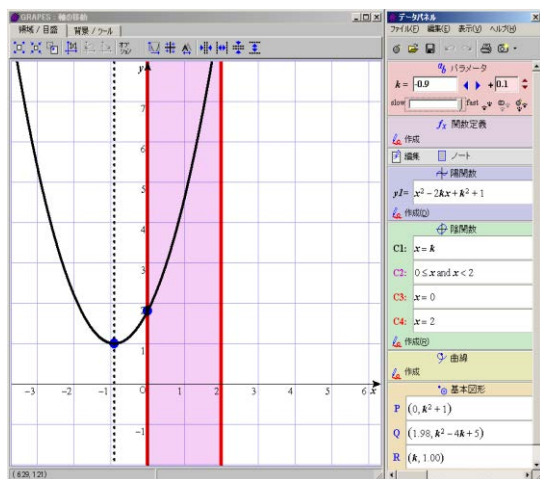
前述したとおり、生徒は1枚目の座標平面のプリントに2次関数の定義域を色付けして表示し、 k の値を任意にとった下に凸の放物線のグラフをその上から重ね合わせて移動させていた。



ここではグラフの移動について理解できた生徒が多かったものの、グラフの移動が軸の移動と同じ意味であることが理解できない者が多かった。そこで教師はパラメーター k の扱いをどうすべきか考えさせながら、「軸の移動」の指導目標の1つである「グラフの移動＝軸の移動」のイメージの定着を達成させるために、生徒がおこなった活動と同じ過程を「GRAPES」上でデモンストレーションした（下図参照）。

まず定義域の両端の色を変え定義域内を塗りつぶして強調し、 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 1$ のグラフを表示した。その定義域を表示したまま、グラフの中に軸である $x = k$ を点線で表示させ、パラメーター k の値を変化させることによって、グラフと軸が連動して動くことを視

覚的に理解させた。その次にグラフを表示した状態で軸のみを非表示にしたり、逆にグラフを非表示にした状態で軸のみ表示したりするなど、表示の状態を変えながら同様の操作をおこなった。パラメーター k の値の変化とともに軸が移動することによって最小値が変化することをとらえさせた。



おおむね、活動が終了したところで、定義域の移動と軸の移動という2つの観点から、数名の生徒を指名し、自ら出した解答とその根拠を発表させた。それによると、生徒が2つの観点で問題を捉える際に苦労したポイントは、「グラフか定義域のどちらを動かせばよいのかの見きわめをすること。」や「最小値をとる x の値の場合分け」だった。とくに「境界の扱い」については難儀したようである。しかし後に述べるが、実際に自ら手を動かして実験・観察をおこなったので、境界を含むか含まないかの判断は帰納的につかめたようであった。

授業のまとめに「GRAPES」を用いて、生徒が実験・観察の活動をおこなった過程をふりかえり、定義域の移動や軸の移動にともなう最大値・最小値の変化など、生徒が出した結論に対して検証をおこなった。

(2) 指導上の留意点および参考となる点

指導実践から、次の8点」が指導上で留意する点および参考となる点として考えられた。

- ① 教師が用意したツールについて、その使い方から生徒が自らどのように活用するかを考えさせることが重要である。
- ② 必要に応じて、プロジェクターでデモンストレーションして、そのテーマをつねに生徒の思考の中心に置いておき、問題の意識を持続させる。
- ③ 定義域の移動では短冊の幅が2であることを気づかせることにより、定義域がパラメーターで表わされていても、定義域そのものは x 座標で2の幅で動くことを理解させる。
- ④ 定義域の移動で、たとえば $a=1$ のとき、 $x=a$ と考えないで、 $x=1$ と具体的に短冊を置いた部分の x 座標で最大値・最小値を求めようとする例があった。短冊の左端が $x=a$ 、右端が $x=a+2$ であることを知らしめ徹底させなければならない。
- ⑤ 軸の移動ではどこに何をあわせればよいか、軸や定義域を強調して考えている生徒の

例など、机間指導しながら、題材として適切な例を紹介し、さらに活動のなかで生徒どうしの議論を活性化させる。

- ⑤ 誤りを恐れさせず、生徒に自らの意見を述べさせるようにする。
- ⑦ デモンストレーションをおこなうことによって、適宜生徒の理解に対応した教師の支援や内容確認を行う。
- ⑧ 「定義域の右側か左側」「頂点」で最大値・最小値を示す点をとる場合分けの必要性を体感的に理解させる。それによって定義域の境界の扱いが理解できる。

（３）指導実践によって得られた内容

<生徒の活動>

- ① プリントの活用方法に対して、多くの吟味をおこなうので、演繹的な思考力や創造性の育成ができる。
- ② 自ら考えたことをクラスメートと教えあうことが可能で、また、友人の意見に耳を傾けることができるので、コミュニケーション能力や説明力・表現力などの演繹的な力を養うことができる。
- ③ 板書やデモンストレーションだけの一斉授業とはちがい、定義域・軸の変動がある程度各自のペースで身体的活動によって確認できる。それにより、実験や観察を通して現象をとらえる帰納的な姿勢が養えるとともに、興味や関心が向上する。

<GRAPES>

- ① 必要に応じて「定義域の境界」「グラフ」「軸」「点」を表示したり、非表示にすることが簡単にできるため、おおむね各生徒の理解に応じて、柔軟に指導展開することが可能である。
- ② 授業終了後に質問に来た生徒に対し、それぞれに応じた内容の帰納的なデモンストレーションが再現できる。
- ③ 生徒が活動していることと連動することができるので、発言・アイディアをすぐにデモンストレーションすることが可能であり、帰納的に生徒の問題に対する意識が深まり発言が活性化する。
- ④ 生徒の出したアイディアに対して、生徒間での議論を促すための働きかけが容易になり、演繹的にクラス内で問題解決に向けた一体感が得られた。

（４）指導上の反省点

<生徒の活動>

- ① 生徒が最初の導入段階で、ツールをどう活かすかのアイディアを出すために、適当に教師の誘導をおこなう必要がある。
- ② 生徒自身の積極性の差で、実際に取り組むまでの時間差が生じてしまい、活動する内容に対して、理解の差が生じた。
- ③ 指導の上で参考となる点でも述べたが、生徒のなかには、定義域の移動では両端の座標($x=a$, $x=a+2$)を実際に置いてある座標で考えてしまう者がいるので、変数で考えさせ

なければならない。

- ④ 身体的な活動をおこなうことに楽しさを感じてくれたのは良いが、教師がコンピューターで支援する内容を聞かずに、いつまでも身体的活動に集中してしまった者がいたので、その対策も考えなければならない。

<コンピューター>

- ① コンピューターやプロジェクターを準備している間に、無駄な時間を過ごさないように復習問題などの課題が必要である。授業で間があかないようにしなければならない配慮が必要だった。
- ② 定義域やグラフ・軸を表示する順序が大変重要で、順序をあやまると、考えさせたい内容が先に表示されてしまい、発問の答えがわかってしまうために指導目的が達成できなくなる恐れがある。デモンストレーションに対して、手順の熟知のため、教師がリハーサルを綿密にしておく必要がある。
- ③ プロジェクターの画面に生徒の興味・関心をひきつけさせるように、説明するときの声の強弱の変化や、デモンストレーションのときの工夫をしなければならない。
- ④ 生徒ひとり一人にコンピューターを操作してもらえれば、もっと帰納的な活動の幅が広がり、より効果的な指導が望めたと思う。

(5) 生徒の感想

授業終了後に生徒から聞いた感想は、肯定的なものとしては以下のものがあつた。

- ・ふだんの授業とは違い、手を動かしてコンピューターで確認できたから、よくわかった。
- ・身体を使って数学の学習をしたことがなかったので、眠たくならずに楽しめた。
- ・定義域の場合分けは黒板で書かれただけでは理解できなかったが、よく理解できた。
- ・自宅のパソコンに GRAPES をインストールして、自分でも使ってみたい。

また、これに対して否定的なものとしては次のものがあつた。

- ・黒板に板書できれいに書いてくれたほうが、ノートに残ってよかった。
 - ・配布されたツールをどうやっていいのか見当もつかなかった。
 - ・コンピューターを使ったが見ているだけだったので、少し飽きてしまった。実際に自分で操作してみたかった。
 - ・数学なのだから、頭の中とノートの上で出された問題をじっくり考えるべきだと思う。
- というのがあり、肯定的な感想とは逆に、普段通りの授業形態や課せられた問題を解いているほうがいいと感じている感想もあつた。

5. まとめと今後の課題

本研究の指導実践による効果を見るためのひとつの指標として、実践終了後におこなわれた定期評価の状況を示す。高校1年生9クラス405名に対して同一問題でおこなわれた数学の評価において、実践をおこなったクラスの平均点は、前回までは中位の成績だったものが、9クラス中2位の成績となった。とくに本研究に関する内容について分析した結果、定義域および軸の移動に関する問題の正答率は実践していない他のクラスに比べ、

約 20%程度高かったことが見られた。これがクラス順位上昇の要因になったと考えられる。

生徒の否定的な感想から考察されるように、数学を学ぶのに手を動かす活動は必要性を感じないと考える者に対し、身体的な活動への関心を高める指導方法など、新たな課題が析出されたが、帰納的に身体的な活動と教師のコンピューターによる支援は、定着しづらいと思われる部分での指導で、効果を発揮することが確認できた。すなわち、演繹的な面と帰納的な面の両方の活動を合わせておこなうことが、数学に対する興味・関心の向上につながり、その上で論理的な思考を養うことにつながるのである。終わりに本研究では次のような結論を得ることができた。

- ① 理解しづらいと思われる部分の内容であっても、手を動かし、主体的な実験・観察をおこなえば、理解度が高まる。
- ② 生徒の興味・関心が高まってきた段階でのコンピューターを用いた教師の支援や指導は、数学に対する興味・関心の向上につながり内容の定着に効果的である。
- ③ 板書だけでは、デモンストレーションに限界があり、コンピューターを用いて支援すれば、作図手順を繰り返し再現できるなど、生徒が理解しづらいと考えられるグラフや図の動的な指導に適している。

＜引用・参考文献＞

- 永田潤一郎(2013)「数学的活動の充実と数学的に考える力の育成に関する考察」第46回
秋季研究大会口頭発表および発表集録 pp145-148
- 相馬一彦(2008)「考える力と知識・技能を『バランスよく、同時に』」日本数学教育学会
誌 数学教育 62-3 2008 第90巻第5号 pp23-28
- 大橋志津江(2005)「高等学校の教育のあり方」
日本数学教育学会誌 数学教育 59-3 2005 第87巻第5号 pp20-29
- 永田潤一郎(2005)「中学校数学科の指導に関する教師の意識調査とその分析」日本数学教育
学会誌 数学教育 59-3 2005 第87巻第5号 pp2-11
- 松ヶ野紘子(2006)「数学科の授業における認知的道具としてのコンピューターの利用の検討」第39回数学教育論文発表会論文集 2006 pp619-624
- 半田 真(2007)「主体的に「数学的な考察」を促す指導法の研究」第40回数学教育論文
発表会論文集 2007 pp301-306